Estratto da *Bollettino dei Docenti di Matematica*, numero 51, dicembre 2005, Bellinzona (Svizzera), UIM-CDC, pagg. 53-62

Quale matematica per la scuola media?[1]

Gianfranco Arrigo

This paper takes up the subject discussed in the number 48 of the BDM but, on that occasion, concerning only primary school. Now the focus is moved onto low secondary school which completes the compulsory school training.The reflection suggested by the author does not dwell upon what to teach (the new 'Piano Formativo' of the low secondary school clearly states the contents), but it only examines how to teach, a delicate and vital issue, particularly in the light of the results of the recent PISA survey.

1. Anche in Germania…

Il Ticino scolastico ha quasi sempre fatto riferimento alla pedagogia ginevrina e francese oltre che, ci mancherebbe, a quella italiana. Questa volta mi è propizia l'occasione per proporre alcune riflessioni freschissime dei nostri vicini tedeschi. Il numero 127 della rivista "mathematiklehren"[2] è interamente dedicato a una interessante e documentata riflessione sullo stato dell'insegnamento della matematica in Germania. In esso si trovano anche articoli dedicati all'immagine che gli studenti germanici hanno dell'insegnamento di questa disciplina. Sono riportati sia i risultati delle varie inchieste effettuate sia esempi di risposte, scelte, credo, fra le più significative. Ebbene, la lettura di queste pagine (una settantina) mi ha rafforzato la convinzione che la situazione dell'insegnamento della matematica si presenta in modo analogo in Germania come in Francia e in Italia, praticamente in tutta l'Europa.
Dico subito che la situazione è preoccupante e che la scuola deve fare di tutto per uscire dalla stasi nella quale si è adagiata da qualche anno. Mi spiace che ci siano volute le indagini internazionali (non del tutto attendibili, ma di forte impatto pubblico come la recente PISA) per portare alla luce gli aspetti negativi dell'insegnamento della matematica che vengono esaminati anche dai colleghi tedeschi nella rivista citata. Gli autori sono tutti matematici che si occupano di didattica, quindi persone qualificate per esprimersi su questo tema tanto delicato quanto importante.
Come giudicano gli studenti l'insegnamento della matematica ricevuto finora?
È quasi incredibile, ma gli studenti interpellati –per mezzo di appositi questionari- mostrano di avere idee chiare e corrette sulla qualità dell'insegnamento. Innanzi tutto individuano l'esistenza di grandi differenze da insegnante a insegnante: con alcuni si impara e si ha piacere di fare matematica, con altri non si impara e si finisce per odiare la disciplina. Il docente di matematica è ritenuto la persona centrale -il massimo responsabile- della riuscita dell'apprendimento. Quasi tutti apprezzano nel docente una buona capacità di spiegare (e di rispiegare, se necessario), l'importanza che questi assegni nutrite serie di esercizi, la sua disposizione a correggere a breve termine i compiti fatti a casa e a promuovere la discussione in classe di determinati esercizi generalmente non riusciti. Un quadro tradizionale, non c'è che dire, centrato sulla sequenza spiegazione-esercizio-ripresa della spiegazione, ma che va apprezzato per la spontaneità mostrata dagli studenti i quali sono stati abituati a ricoprire nelle lezioni un ruolo per lo più passivo, molto dipendente dall'insegnante.

[1] Questo contributo riprende il discorso iniziato con l'articolo *«Quale matematica per la scuola elementare?»* apparso in una prima versione sul numero 48 del BDM e ripreso dalla Conferenza dei Direttori degli Istituti Scolastici Comunali del Canton Ticino nel fascicolo *«A scuola per il piacere di apprendere»*, a cura di Adolfo Tomasini, in via di pubblicazione presso il Centro Didattico Cantonale di Bellinzona.

[2] *mathematiklehren*, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004, Klett Verlag

A proposito sono significative alcune percentuali dedotte dai dati statistici:

- il 68% dichiara di non aver mai sentito l'insegnante fare accenni alla problematica e alla storia che sta dietro ai concetti presentati;
- il 77% dice di non essere mai stato stimolato a cercare relazioni fra i concetti appresi, né a produrre riflessioni metacognitive;
- l' 81% afferma di non aver mai applicato modelli matematici a dati reali;
- l'87% ritiene di non aver mai visto alcuna applicazione della matematica a situazioni quotidiane;
- il 95% assicura di non aver mai usato il computer per risolvere problemi assegnati dal docente.

Su che cosa in realtà abbiano fatto a matematica, gli studenti, rispondendo a una serie di domande precise, si esprimono così:

- hanno tradotto problemi in equazioni;
- hanno risolto equazioni;
- hanno eseguito lunghi esercizi di calcolo;
- hanno ricopiato teoria dalla lavagna;
- sono stati spettatori di insegnanti che risolvevano problemi alla lavagna.

Ben più interessanti e positivi sono i desideri espressi dagli studenti che hanno risposto a domande del tipo: "che cosa si dovrebbe cambiare nell'insegnamento della matematica?", "come dovrebbero comportarsi gli insegnanti?", "quali forme didattiche sarebbero da preferire?", "che tipo di clima dovrebbe istaurarsi in classe durante le lezioni di matematica?":

- l'insegnamento dovrebbe essere più vivace (*lebendig*), dovrebbe tenere conto maggiormente dell'applicabilità delle conoscenze, della bellezza della matematica, del suo sviluppo storico;
- l'insegnante dovrebbe considerare seriamente il fatto che si impara con "testa, cuore e mano"; in particolare sarebbero gradite dagli studenti attività di misurazione, piegatura, costruzione, ecc.
- sulle forme didattiche, gli studenti puntano molto sull'apprendimento cooperativo (per esempio con lavori in piccoli gruppi);
- secondo gli studenti, l'insegnante dovrebbe predisporre momenti di calma, silenzio e concentrazione;
- l'insegnante stesso dovrebbe entrare in classe rilassato, mantenere un atteggiamento corretto e promuovere la cooperazione e la solidarietà di fronte alle difficoltà dell'apprendimento.

Questi stimoli forniti dagli studenti vengono poi ripresi ed elaborati negli articoli scritti dai didatti tedeschi. In particolare si afferma senza mezzi termini la necessità di staccarsi dall'interpretazione *predicativa* del pensiero, secondo la quale –per sintetizzare- le varie componenti della conoscenza si collocano nella mente come le tessere in un mosaico. Per contro si afferma la volontà di promuovere, in ogni ordine di scuola, l'interpretazione *funzionale-cognitiva* dell'apprendimento, secondo la quale ogni processo di apprendimento è legato alla risoluzione di un problema. Gli individui che pensano in modo funzionale procedono per tentativi (ovviamente in modo cosciente e conseguente a quanto già conosciuto) prima di giungere a una completa strutturazione delle proprie idee. Stabiliscono un dialogo con l'oggetto di apprendimento e giungono alla soluzione completa mediante successivi interventi di modifica e di adattamento della soluzione parziale.

2. Un grave pericolo

La pubblicazione dei risultati TIMSS mi aveva suggerito di intervenire sul numero 35 di questa rivista, uscito nel dicembre del 1997, con uno scritto dal titolo volutamente provocatorio: *"Siamo i primi della classe?"*. In quella sede esortai gli insegnanti di matematica ticinesi a non considerare quel risultato -peraltro lusinghiero- con troppa serietà. I miei dubbi sull'attendibilità e sul significato di tali risultati erano radicati su due elementi:

- l'affidabilità relativa di qualsiasi test scritto[3];
- il fatto che TIMSS avesse proposto esercizi di diretta applicazione dell'apprendimento, non veri problemi.

In sostanza avevo detto agli insegnanti suppergiù questo: «fin qui ci siamo, ma ora si tratta di intraprendere la via verso un apprendimento decisamente euristico della matematica, di curare la formazione del pensiero, di tendere alla pratica della risoluzione di (veri) problemi, cioè di problemi che non siano di diretta applicazione della conoscenza acquisita, ma che presentino situazioni nuove, ben studiate per sviluppare le capacità cognitive superiori (analizzare, sintetizzare, intuire, inventare[4])». Un apprendimento, guarda caso, che nella sua linea direttrice ricalca, almeno in parte, i desideri espressi dagli studenti tedeschi, presentati nel paragrafo precedente.
Il messaggio lanciato in quell'occasione mi sembra chiaro.
Nel frattempo la scuola media ticinese si è data un nuovo "Piano di formazione". Esso non appare più come un programma inteso in senso tradizionale -un elenco di argomenti e di obiettivi specifici, per intenderci-, ma si fonda su una Mappa formativa generale che, per la prima volta nella nostra storia scolastica riveste (finalmente) il carattere di una (chiara) filosofia dell'insegnamento. Dalla Mappa formativa generale, gli esperti delle varie discipline hanno ricavato le Mappe disciplinari: un'operazione di qualità, un esempio di coerenza. Sulla carta, almeno.
La Mappa formativa per la matematica rappresenta un netto salto di qualità: essa indica agli insegnanti importanti finalità educative che, oltre ai tradizionali "saperi" e "saper fare" , concernono in modo equo i "saper essere", novità assoluta rispetto al passato. Ciò significa che la matematica, anche quella scolastica, anche quella che si insegna in una classe di corso base, dev'essere interpretata dagli insegnanti in tutti i suoi risvolti e non solo –come purtroppo accade ancora- unicamente nei suoi aspetti tecnici e nozionistici. Ce lo spiegano chiaramente anche i didatti tedeschi, quando affermano che:
«un ritorno alla tradizionale "didattica degli esercizi", che taluni ancora preconizzano, non è affatto una soluzione. (…) Non solo la matematica, anche la sua didattica dev'essere tematizzata. Ciò significa intraprendere una riflessione sull'apprendimento, che, già a partire dalla scuola media può essere proposta in classe.» (Wittmann G.[5], 2004).
E ancora:
«È incontestabile che attraverso una esercitazione insistita di regole e procedimenti si arriva a risolvere gran parte degli esercizi scolastici. Ma così facendo si costruisce un apprendimento paragonabile a un gigante dai piedi di argilla. Quando gli allievi così (ben) preparati tecnicamente si trovano a dover risolvere problemi nuovi più complessi e aperti –

---

3 Si veda in particolare il "Rapporto intermedio relativo alla ricerca sulla robustezza degli apprendimenti" (in bibliografia), nel quale viene messo in risalto -e documentato da una serie di verifiche sperimentali- come dietro a una risposta esatta non vi sia sempre un corretto apprendimento, mentre in certi casi vi sia un apprendimento corretto anche se non ancora completo dietro a risposte considerate errate.
4 Mi riferisco alla "Tavola tassonomica per la matematica" di Arrigo-Frabboni, 1993.
5 Gerald Wittmann docente di didattica della matematica all'Alta Scuola Pedagogica della Svevia, Gemünd.

simili a gran parte di quelli proposti dallo studio PISA-, o a dover agire in situazioni di apprendimento, il fallimento è assicurato.» (Leuders T.[6]-Pallack[7] A., 2004). »
E a chi replica che attraverso la pratica di situazioni e di (cosiddetti veri) problemi si trascura l'apprendimento sicuro e completo di nozioni e di procedimenti matematici giudicati indispensabili per il proseguimento degli studi, i didatti tedeschi rispondono:
«È proprio necessario costruire "completamente" l'armamentario strumentale? Non è proprio possibile riprendere e rinforzare metodi elementari, anche nella scuola superiore, nel momento in cui se ne ha bisogno e si è in grado di approfondirli e di applicarli a situazioni idonee?[8]»

La prassi consistente nel centrare l'insegnamento della matematica su nozioni e procedimenti ripetuti fino al raggiungimento di automatismi (per taluni allievi) o fino alla nausea e al rifiuto della disciplina (per altri), da noi, si contraddistingue come stato patologico dell'insegnante, causato da un'eccessivo timore di non preparare in modo sufficiente gli allievi per le scuole successive. Siamo giunti così al punto nevralgico. Tutti i buoni propositi e l'intera operazione di rinnovamento lanciata col Piano di formazione arrischiano di rimanere sulla carta per colpa (anche) di questa malaugurata paura del dopo.
Occorre inoltre osservare che, volendo preparare gli allievi in vista, per esempio, della frequentazione del liceo, in quel modo, paradossalmente, si finisce per mandarli incontro a gravi difficoltà. Perché lo strato di nozioni e tecniche consegnato al giovane alla fine della scuola media non può che essere superficiale e se anche dovesse resistere nel corso dei primi mesi di scuola superiore -dando così ingannevolmente l'impressione, al docente di scuola media, di aver avuto successo-, col passare del tempo viene assorbito da un mucchio di altre cose e, quando finalmente lo studente sarà chiamato a dare prova di maturità, non si ritroverà più: triste destino causato da un maledetto quanto clamoroso errore didattico. Lo stesso può essere compiuto anche dal docente di liceo, eccessivamente preoccupato di preparare gli studenti a superare l'esame di maturità.

Sui contenuti che dovrebbero entrare in un programma aggiornato di matematica per la scuola media non mi esprimo in questa sede: rimando al Piano di formazione per la matematica, che condivido pienamente. Più che l'aspetto contenutistico, mi preoccupa quello didattico. Gli insegnanti devono prendere coscienza del problema e cercare di convergere il più possibile verso le linee direttrici appena tracciate. Non è facile per chi è lontano da questi principi, lo so, ma vale la pena tentare. Non solo per gli allievi (anche se sarebbe più che sufficiente per giustificare il cambiamento!), ma anche per loro stessi, per la loro professionalità. Non è certo un grande problema insegnare ad allievi di terza media come si risolve un'equazione di primo grado; ben altro è fare in modo che l'allievo capisca il senso che sta dietro allo strumento equazione, che sia in grado di decidere quando e come usarlo per rispondere a determinati interrogativi indotti da una situazione, che sappia valutare criticamente la soluzione trovata. È solo un piccolo esempio, lo riconosco, ma si può partire anche da qui, a condizione di perseverare e di costruire di conseguenza. Ciò significa anche abituare lo studente a dubitare, piuttosto che inculcargli (false) certezze. Vale di più dubitare di una risposta (anche corretta) di un allievo che affrettarsi a dichiarare corretta la stessa, magari ripetendola convenientemente emendata. Perché non è la certezza dichiarata ma il dubbio che stimola la riflessione.

---

[6] Timo Leuders docente di didattica della matematica all'Alta Scuola Pedagogica di Freiburg.
[7] Andreas Pallack, referente scientifico per matematica e scienze naturali presso il Landesinstitut für Schule, NRW, Soest.
[8] Ibidem.

Parallelamente, è più produttivo fare in modo che gli allievi debbano districarsi di fronte a un solo problema sconosciuto, che non far loro risolvere una serie di problemi noti perché spiegati in lungo e in largo precedentemente.
Di questo passo, il libro di testo (o la dispensa) che "spiega la teoria" risulta dannoso, mentre tornano molto utili i manuali che propongono situazioni di apprendimento e attività di laboratorio matematico, prima ancora di proporre sintesi teoriche o sequenze di esercizi di apprendimento.

3. L'esempio del calcolo letterale, tanto per capirci

In quarta media si dovrebbe giungere a una prima formalizzazione del calcolo letterale. La tradizione vuole che si inizi con i concetti di monomio, di polinomio, di grado di un monomio (di un polinomio) e con le tecniche di base come la moltiplicazione di un monomio per un polinomio, la messa in evidenza di un fattore comune da una somma algebrica, i cosiddetti "prodotti notevoli", per finire in particolari tecniche di fattorizzazione applicate poi alla semplificazione di frazioni letterali e al calcolo di somme algebriche di frazioni letterali. Chi segue ogni anno questo percorso si sarà (finalmente) accorto che, accanto a quei pochi studenti che imparano tutto al primo impatto e a un altro insieme di allievi che apprendono mnemonicamente (leggi: strato superficiale), vi è sempre quel gruppo che non capisce e che, nonostante tutti gli sforzi profusi da chi insegna, cade costantemente nei soliti errori. A questo punto, scartate le abituali battute sul quoziente d'intelligenza o sul mancato impegno, occorre riflettere seriamente.
La mia risposta è già contenuta nelle righe precedenti: non possiamo retendere che l'allievo raggiunga un apprendimento cosciente e stabile nel tempo, se non gli facciamo capire prima il senso di effettuare un calcolo letterale. Per uno studente di quarta media, il calcolo letterale deve essere prima di tutto la generalizzazione del calcolo numerico, non un sistema formale in cui gli oggetti sono lettere che vanno composte secondo un numero sovrabbondante di regole (per lo più ingiustificate) e disseminato da altrettanti divieti (pure poco comprensibili). Prima di iniziare la sistemazione teorica –che va completata nelle scuole superiori- occorre quindi far nascere in lui la necessità di usare lettere e poi di effettuare calcoli con esse. In questo modo l'allievo non solo vede che cosa c'è dietro la manipolazione algebrica delle lettere, ma è anche stimolato a perfezionare le proprie capacità, a mano a mano che avvertirà nuove esigenze, nel contesto della risoluzione di un nuovo problema. Scommettiamo che così facendo più nessuno porrà la "tradizionale" domanda: «a che serve tutto ciò?».
Già, ma come riuscire a far nascere la necessità di usare lettere? Ecco una domanda impegnativa. Le possibilità sono molte: la scelta sta all'insegnante, ma il criterio della scelta dovrebbe possibilmente tenere conto anche delle caratteristiche della classe, delle situazioni contingenti, in generale di tutto ciò che potrebbe stimolare maggiormente l'interesse degli allievi. Siccome in questo momento non mi riferisco a una classe particolare (questa del resto è la situazione degli autori di manuali), propongo un paio di attività, a mo' di esempio, cosciente del fatto che ogni insegnante saprà costruirsi le proprie.

3.1 Primo esempio: intuizione del termine n-esimo di una successione numerica

La situazione[9]

Consideriamo una successione di numeri interi positivi, tale che ogni numero dal terzo in poi sia

[9] Da uno spunto offerto dalla (sempre ricca) raccolta di problemi dell'organizzazione internazionale Kangourou; si veda in particolare Kangourou Italia, sul sito www.kangourou.it; il problema al quale mi riferisco è il numero 30 della serie Cadet del 2002.

la somma di tutti quelli che lo precedono, il primo numero sia 1 e l'ultimo sia 2888.

Domande possibili:
Di quanti termini si compone la più lunga successione che si può costruire con questa legge?
Qual è il secondo termine?
E volendo si possono anche trovare tutti i termini della successione.

Un possibile iter risolutivo

Ci può aiutare la (ri)costruzione della successione dall'inizio, introducendo una lettera al posto del secondo termine che per ora è sconosciuto.

n	**termine di ordine n**
1	1
2	a
3	1+a
4	$1+a+(1+a) = 2 \cdot (1+a)$
5	$1+a+(1+a)+[(2 \cdot (1+a)] = 2^2 \cdot (1+a)$
6	$1+a+(1+a)+2 \cdot (1+a) + 2^2 \cdot (1+a) = 2^3 \cdot (1+a)$
…	…
n	$2^{n-3} \cdot (1+a)$

La formula che esprime il termine n-esimo è raggiunta per intuizione: è questa abilità mentale che ci interessa sviluppare nella scuola media[10].
Nel nostro caso dev'essere:
$2^{n-3} \cdot (1+a) = 2888$
cioè
$2^{n-3} \cdot (1+a) = 2^3 \cdot 19^2$
da cui si ricava (nel caso della successione più lunga):
$n-3 = 3$, cioè $n=6$ e $1+a = 361$, cioè $a = 360$.
Ed ecco infine i 6 termini della successione più lunga:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\mathbf{t_n}$	1	360	361	722	1444	2888

Appendice
Le tabelle mettono in risalto anche la formula ricorsiva della successione:
$t_n = 2 \cdot t_{n-1}$, per $n \geq 4$

3.2 Secondo esempio: l'epantema[11] di Timarida[12] o fiorita di Timarida

Una versione moderna proponibile in classe[13]

---

[10] Il lettore può facilmente dimostrare la correttezza della formula per induzione completa.

[11] Il termine *epantèma* doveva significare una **concatenazione**, o una **germogliazione in serie**, di risultati, o come conseguenza ed estensione di un risultato iniziale (che costituiva un caso particolare) il cui sviluppo consisteva in una generalizzazione progressiva, o infine come sviluppo in varie direzioni di un risultato raggiunto.

[12] Timarida di Paro (isola greca situata nel Mar Egeo appartenente all'arcipelago delle Cicladi) fu seguace della scuola pitagorica. Visse probabilmente nel IV secolo a.C. ed è noto per i suoi contributi aritmetici.

Aldo, Baldo, Carlo, Diego e Franco pesano assieme 213 kg.
Aldo e Baldo pesano assieme 78 kg;
Aldo e Carlo pesano assieme 84 kg;
Aldo e Diego pesano assieme 67 kg;
Aldo e Franco pesano assieme 89 kg.
Quanto pesa ciascuno di essi?

Un possibile iter risolutivo
Chiamiamo A il peso[14] di Aldo, B quello di Baldo, C quello di Carlo, D quello di Diego e F quello di Franco.
Le 5 equazioni seguenti si ricavano direttamente dal testo del problema:

$(1) \quad A+B+C+D+F=213$

$(2) \quad A+B=78$

$(3) \quad A+C=84$

$(4) \quad A+D=67$

$(5) \quad A+F=89$

Addizionando le equazioni dalla (2) alla (5) si ottiene

$4\,A+B+C+D+F=318$

$3\,A+(A+B+C+D+F)=318$

e, tenendo conto della (1), si può scrivere:

$A=\frac{105}{3}=35$

Infine da ciascuna delle equazioni da (2) a (5), sostituendo il valore trovato di A, si ottengono gli altri valori incogniti.
I pesi cercati, in kg, sono:
A=35 ; B=43 ; C=49 ; D=32 ; F=54

Commento
È pur vero che questo problema potrebbe anche essere risolto senza introdurre alcuna lettera. Basta provarci per costatare quanta fatica in più si deve fare.
Inoltre, l'introduzione di lettere può permettere la generalizzazione di questa situazione, compresa la sua decontestualizzazione.
Si hanno n incognite $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$
Si conoscono le seguenti relazioni fra di esse:

$(0) \qquad x_0+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}=T$

$(1) \qquad x_0+x_1=A_1$

$(2) \qquad x_0+x_2=A_2$

$(3) \qquad x_0+x_3=A_3$

…………………………

$(n-1) \quad x_0+x_{n-1}=A_{n-1}$

Analogamente a quanto fatto nel caso particolare, addizionando le equazioni dalla (2) alla (n–1) e tenendo conto della (0) si ottiene:

---

[13] Il testo del problema è tratto da dal volume di Timpanaro Cardini M. (in bibliografia).
[14] Chiedo scusa ai colleghi di fisica per non usare il termine *massa*, ma preferisco rimanere fedele alla terminologia del problema.

$$x_0 = \frac{T-(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1})}{n-2}$$

$$x_i = A_i - x_0 \quad , \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Il ruolo delle lettere nei processi di generalizzazione è essenziale. Generalizzare una situazione particolare significa cogliere la struttura matematica che la caratterizza. Con ciò si esce dal contesto particolare e si raggiunge un'intera classe di situazioni. Inoltre, avendo generalizzato la situazione, se abbiamo a disposizione un computer, possiamo immettere l'algoritmo risolutivo nella macchina. Fatto questo, sarà sufficiente introdurre il vettore di dati $(T,\ A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1})$ per ottenere in una frazione di secondo la corrispondente soluzione del problema.

3.3 Dulcis in fundo

I due esempi addotti, scelti fra i molti che si potrebbero considerare, dovrebbero suggerirci almeno le seguenti riflessioni didattiche:

- il primo significativo contatto dell'allievo con l'uso delle lettere in matematica dovrebbe avvenire nell'ambito di situazioni sufficientemente ricche da indurre domande stimolanti; nel primo esempio, intuire il termine n-esimo di una successione, o, in generale, capire come si sviluppa un processo, ha in sé un valore intellettuale notevole, che non dovrebbe lasciare indifferente nemmeno il neofita; nel secondo esempio, l'ambito storico e linguistico (Timarida e i pitagorici, il significato del termine «epantema»), se opportunamente presentati, dovrebbero pure agire da stimolo;
- prima di giungere a formalismi di qualsiasi tipo e livello (polinomi, frazioni algebriche, ecc.), occorre proporre in classe diverse attività nelle quali le lettere vengano usate per semplificare iter risolutivi o per meglio capire e descrivere determinati concetti o situazioni;
- sempre nella fase euristica, propedeutica alla formalizzazione, non si devono porre limiti di carattere matematico; le lettere si collocano dove è opportuno (nel primo esempio si trovano anche a esponente) e se si hanno più di due relazioni tra lettere (vedere il secondo esempio), ben vengano; la tradizionale limitazione a non più di due equazioni e due incognite ha provocato gravi danni all'apprendimento perché ha costretto generazioni di insegnanti a inventare problemi tutt'altro che interessanti (per forza!) e a rendere così la materia parecchio noiosa.

Le considerazioni fatte attorno al calcolo letterale possono essere estese -opportunamente adattate- a qualsiasi altro capitolo previsto dai programmi ufficiali. Il raggiungimento di qualsiasi livello di competenza in matematica dipende anche e soprattutto da impostazioni didattiche di questo tipo.
Termino con una citazione vecchia di cent'anni, ma sorprendentemente attuale.
«La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo

mal, pianga sé stesso. Così disse Giove, e lo riferisce Omero, Odissea I, 34. Con questi principii, caro lettore e collega, vivrai felice.» (Giuseppe Peano, 1925[15])

Bibliografia

Arrigo G. *Siamo i primi della classe?* Bollettino dei docenti di matematica, numero 35, dicembre 2001, pg. 103-105. Bellinzona: UIM.

Arrigo G. *Quale matematica per la scuola elementare?* Bollettino dei docenti di matematica, numero 48, maggio 2004, pg. 9-28. Bellinzona: UIM.

Arrigo G. *Rapporto intermedio relativo alla ricerca sulla robustezza degli apprendimenti*. Locarno: ASP, 2004.

Wittmann G. *Zwischen Erwartung und Realität.* Mathematiklehren, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004, Stuttgart: Klett Verlag.

Leuders T.-Pallack A. *Der Grundkurs-Mathematik für alle?* Mathematiklehren, Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen, Nr. 127, Dezember 2004. Stuttgart: Klett Verlag.

Timpanaro Cardini M. (a cura di). *Pitagorici*. Testimonianze e frammenti, Fasc. I, II, III, 1973. Firenze: La Nuova Italia.

Peano G. (1925). Giochi di aritmetica e problemi interessanti. Torino: Paravia. pg. 65

15